

Využití mřížkové Boltzmannovy metody k modelování průtoku v bifurkaci aorty: porovnání s 4D Flow MRI

Use of the lattice Boltzmann method to model flow in the aortic bifurcation: comparison with 4D Flow MRI

Radek Galabov¹, Jan Kovář², Pavel Eichler², Kateřina Škardová², Radomír Chabiniok³, Tomáš Oberhuber², Radek Fučík², Petr Pauš², Aleš Wodecki², Jiří Novotný¹, Jaroslav Tintěra¹

¹Institut klinické a experimentální medicíny, Praha

²Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické, Praha

³UT Southwestern Medical Center, Dallas, USA

Hlavní stanovisko práce

Matematický model proudění může pomoci kvantitativně zhodnotit průtok ve stenty ošetřených místech cévy, kde magnetická rezonance selhává.

SOUHRN

Galabov R, Kovář J, Eichler P, Škardová K, Chabiniok R, Oberhuber T, Fučík R, Pauš P, Wodecki A, Novotný J, Tintěra J. Využití mřížkové Boltzmannovy metody k modelování průtoku v bifurkaci aorty: porovnání s 4D Flow MRI

Cíl: Zhodnotit kvalitativně použitelnost matematického modelu proudění pro zobrazení toku v bifurkaci aorty ošetřené stenty.

Metodika: Bylo provedeno devět vyšetření bifurkace aorty sekvencí 4D Flow. Vyšetření byli pacienti bez stentů, pacienti se stentem v jedné a pacienti se stenty v obou větvích bifurkace. Ze získaných dat o průtoku byla připravena vizualizace rychlostního pole. Na základě segmentace bifurkace aorty a naměřených dat o průtoku byla provedena simulace proudění, včetně oblastí, kde nebylo možné průtok naměřit kvůli artefaktům. Měření a simulované rychlostní pole bylo porovnáno vizuálně.

Výsledky: U pacientů bez stentů simulovaný tok přispěl k odstranění malých nepřesností v měřeném poli. U pacientů se stenty byla simulovaná data konzistentnější než měřená a poskytovala navíc obrázek i o situaci ve stentech.

Diskuse: Simulované rychlostní pole musí být z podstaty konzistentní s fyzikálními zákony, čímž umožňuje korekci měřených dat v místech, kde měření selhává. V závislosti na přesnosti segmentace cév může simulace

Major statement

Mathematical model of fluid dynamics can ameliorate flow assessment in vessels treated with stents, where MRI fails.

SUMMARY

Galabov R, Kovář J, Eichler P, Škardová K, Chabiniok R, Oberhuber T, Fučík R, Pauš P, Wodecki A, Novotný J, Tintěra J. Use of the lattice Boltzmann method to model flow in the aortic bifurcation: comparison with 4D Flow MRI

Aim: The aim of the article is to qualitatively assess the usability of a mathematical flow model for visualizing the flow in aortic bifurcation treated with stents.

Methodology: Nine examinations of aortic bifurcations were conducted using a 4D Flow sequence. Patients without stents, patients with a stent in one branch, and patients with stents in both branches of the aortic bifurcation were examined. 4D Flow data were used to prepare a visualization of the velocity field. Flow simulations were performed based on the segmented bifurcation and measured flow data, including areas where flow measurements were affected by artifacts. Measured and simulated velocity fields were visually compared.

Results: For patients without stents, the simulated flow contributed to eliminating small inaccuracies in the measured field. In patients with stents, the simulated data were more consistent than the measured data and provided additional insight into the situation within the stents.

Discussion: Simulated velocity fields must inherently adhere to the laws of physics,

Přijato: 28. 9. 2023

Korespondenční adresa:

doc. Ing. Jaroslav Tintěra
Institut klinické a experimentální medicíny
Václavská 1958, 140 21 Praha 4
e-mail: jati@ikem.cz

Konflikt zájmů: žádný

Podpořeno Ministerstvem zdravotnictví ČR v rámci projektu č. NV19-08-00071 a skrze institucionální podporu IKEM (IN 00023001), dále Národním institutem pro výzkum metabolických a kardiovaskulárních onemocnění (program EXCELES, projekt č. LX22NP05104) – financováno Evropskou unií – Next Generation EU.

i poskytnout novou diagnostickou informaci. Získané výsledky jsou ovšem pouze kvalitativní a bude je třeba ověřit kvantitativně.

Závěr: Matematický model proudění může pomoci kvantitativně zhodnotit průtok v místech cévy ošetřených stenty, kde přímé měření proudění krve magnetickou rezonancí selhává.

Klíčová slova: 4D Flow, mřížková Boltzmannova metoda, bifurkace aorty.

allowing for the correction of measured data in regions where measurements are compromised. Depending on the accuracy of the segmentation, it may also offer new diagnostic information. However, the obtained results are solely qualitative and will need quantitative validation.

Conclusion: The mathematical flow model can aid in quantitative assessment of flow in the vascular locations treated with stents where the direct MR measurement of blood flow fails.

Key words: 4D Flow, lattice Boltzmann method, aortic bifurcation.

ÚVOD

Měření průtoku velkými cévami pomocí magnetické rezonance (MR) a metody fázového kontrastu (PC) je již přes 30 let běžně používanou technikou, která je elegantní zejména svou zcela neinvazivní povahou. Klasický přístup ke kvantifikaci průtoku krve je umístění 2D vrstvy pokud možno kolmo k průběhu cévy. Na časové sérii obrazů fáze MR signálu je pak zachycena okamžitá rychlost proudění v každém voxelu. Integrací rychlosti přes všechny voxely v průřezu cévy se tak jednoduše získá hodnota okamžitého průtoku krve daným místem cévy (1).

Tento klasický přístup je velmi jednoduchý, robustní a časově nenáročný, má však i své nevýhody a limitace. První praktickou nevýhodou je reálná nepřesnost v umístění vrstvy, která vede i k nepřesnosti kvantifikace průtoku („kolmost“ k průběhu cévy, zejména pokud tato céva je točitá, je obtížně dosažitelná). Další s tím také související problém je, že měříme pouze jednu složku vektoru rychlosti. Zjedné měřené vrstvy pak pochopitelně nelze získat celkovou představu o komplexnosti proudění, tedy konkrétně výskytu vírů a turbulencí toku.

Tato zmíněná omezení nemá technika nazývaná 4D Flow (2), která není v uživatelském MR prostředí zdaleka tak stará. V tomto případě je měřen celý objem pokrytý desítkami vrstev, jsou měřeny všechny tři prostorové složky vektoru rychlosti a stejně jako u 2D techniky je měřena časová série obrazů s časovým rozlišením přibližně 40 ms. Tento přístup je velmi atraktivní, má však jednu zásadní nevýhodu, a tou je délka trvání měření. Pokud měříme průtok cévami v hrudní a břišní oblasti, je nutné eliminovat vliv pohybu při dýchání. V případě 2D techniky lze celkem snadno dosáhnout délky měření dostatečně

krátké na to, aby pacient mohl na tuto dobu zadržet dech. To však ani zdaleka není možné u 4D Flow, a tak nezbyvá než použít synchronizaci s dýcháním pomocí navigátoru (v nejmodernějším přístupu využitím dechového senzoru v patientském stole). Vlastní data jsou pak měřena pouze v určité krátké fázi výdechu, kdy je hrudník „v klidu“, a tedy časová efektivita náběru dat je v lepším případě pouze kolem 50%. Konečná délka měření je tak zásadně ovlivněna délkou a hlavně pravidelností dechového cyklu pacienta, nežřídka přesáhne takové měření 15 minut (na rozdíl od 2D techniky, kdy měření trvá do 20 s).

Signál MR je – jak známo – silně ovlivněn přítomností kovových implantátů v zobrazované oblasti (3). Je to dáno jednak významným poklesem homogenity magnetického pole způsobeným kovovým materiálem a v případě stentů může mít i vliv charakter konstrukce (pletení), kdy uvnitř stentu je radiofrekvenční stín (stent zamezuje excitaci radiofrekvenčním pulzem a odstíní i signál MR). Svou roli hraje také orientace stentu v magnetickém poli. Stenty tedy mohou buď částečně, nebo zcela eliminovat signál MR z oblasti uvnitř. Měření průtoku či charakteru proudění v těchto případech pak logicky selhává.

Na obrázku 1 je ukázán charakter signálu MR u několika různých stentů, a to jen dokumentuje výše uvedený rozbor. V případech, kdy měření proudění uvnitř stentu selhává, by mohlo být výhodné použít pro tuto oblast relevantní model proudění, který chybějící MR data nahradí. Právě o tento přístup jsme se snažili v naší studii, jejíž výsledky tento příspěvek shrnuje. Ve studii jsou zařazeni pacienti s různými stenty, ale také subjekty bez zásadních změn na aortě.

Popsat fyzikálně proudění tekutiny není ani zdaleka triviální. Rovnici, která proudění popisuje, lze řešit jen iterativně

procesem na velmi výkonném počítači (4). V naší implementaci se přitom hrubý odhad podoby proudění opakovaně porovnává s naměřenými daty (tzv. okrajová podmínka) a tím se simulace s každým krokem zpřesňuje. Zároveň je přitom výpočet korigován na správné fyzikální chování tekutiny dle patřičné rovnice.

Matematický model průtoku krve byl v naší studii založen na předpokladu nestlačitelnosti krve ve velkých cévách a předpokladu, že se krev chová v těchto geometriích jako newtonovská kapalina. Na základě těchto předpokladů byla dynamika krve popsána pomocí nestlačitelných Navierových-Stokesových rovnic, jejichž řešení bylo numericky aproximováno pomocí mřížkové Boltzmannovy metody (5).

METODIKA

Skupina pacientů

Do studie bylo zařazeno celkem devět vybraných měření tak, aby výběr pokrýval různé klinické situace. U všech pacientů se jedná o vyšetření bifurkace aorty. Část pacientů měla implantované stenty v obou větvích bifurkace, část pacientů jen v jedné a část pacientů neměla implantované žádné stenty (tab. 1).

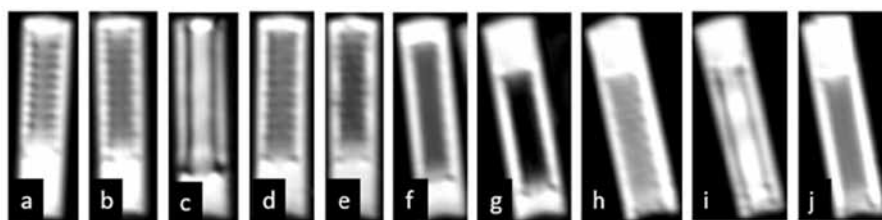
U všech subjektů zařazených do studie byl získán informovaný souhlas s využitím naměřených dat pro vědecké účely.

MR vyšetření

Vyšetření byla prováděna na MR systému Siemens Avanto Fit 1,5 T s použitím 18kanálové body-matrix RF cívký ve spojení s elementy páteřní cívký.

U všech subjektů zařazených do studie bylo provedeno měření 4D Flow metodou PC, sekvencí gradientního echa s následujícími parametry: měřené prostorové rozlišení $3,4 \times 2,4 \times 3,5 \text{ mm}^3$ interpolované na rozlišení $2,4 \times 2,4 \times 2,5 \text{ mm}^3$, FOV = 380 mm, 40 vrstev pokrývá 100 mm, TR/TE = 39/2,3 ms, šířka pásma (BW) = 496 Hz/pixel, akcelerační PAT faktor = 2 a Venc = 150 cm/s.

Při všech vyšetřeních byly také naměřeny morfologické obrazy aorty pomocí nativní MR angiografie (MRA) sekvencí 3D TrueFISP: měřené prostorové rozlišení $1,5 \times 1,3 \times 1,7 \text{ mm}^3$ interpolované na $1,25 \times 1,25 \times 1,25 \text{ mm}^3$, FOV = 380 mm, 96 vrstev pokrývá 120 mm, TR/TE =



1 Signál MR uvnitř stentů: (a) Luminex; (b) EV 3; (c) WALL stent; (d) Sinus Superflex; (e) EV 0; (f) Sentinel; (g) Sinus REPO; (h) Aurora; (i) Eexpandela; (j) Smart
MR signal inside of different stents: (a) Luminex; (b) EV 3; (c) WALL stent; (d) Sinus Superflex; (e) EV 0; (f) Sentinel; (g) Sinus REPO; (h) Aurora; (i) Eexpandela; (j) Smart

341/1,5 ms, BW = 715 Hz/pixel, PAT faktor = 2.

Podle konkrétní indikace obsahoval protokol vyšetření také další měření, jako např. kinetické CINE nebo T2-vážené strukturální obrazy.

Data z 4D Flow sekvence byla opravena na aliasing a okleštěna o voxely mimo cévu zájmu. Postup této přípravy dat lze najít v článku (6). Takto upravená data sloužila jako jeden ze vstupů do simulace proudění.

Matematický model

Pro potřeby matematické simulace byla krev považována za nestlačitelnou newtonovskou kapalinu s konstantní teplotou a hustotou. Pro popis proudění v aortě byly použity nestlačitelné Navierovy-Stokesovy rovnice.

Pro numerické řešení nestlačitelných Navierových-Stokesových rovnic byla použita mřížková Boltzmannova metoda (Lattice Boltzmann method – LBM). Znatelnou výhodou této metody je

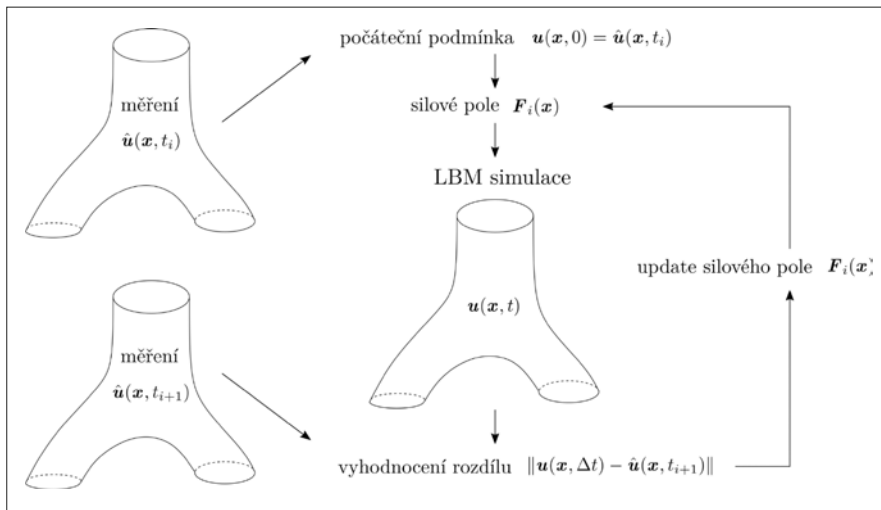
časová efektivita samotných výpočtů, což vychází z možnosti tuto metodu efektivně paralelizovat pro výpočty na grafických kartách disponujících vysokým počtem výpočetních jader. Při použití této metody je trojrozměrná výpočetní oblast diskretizovaná pravidelnou mřížkou s konstantním prostorovým krokem. Na diskretní mřížce je chování tekutiny popsáno pomocí konečného počtu hustot rozdělení, z nichž jsou rekonstruovány makroskopické veličiny, jako jsou rychlost a tlak. Vývoj těchto diskretních hustot rozdělení v čase je řízen mřížkovou Boltzmannovou transportní rovnicí.

Pro použití metody LBM pro úlohu simulace proudění v aortě bylo nejprve potřeba vygenerovat výpočetní síť odpovídající tvaru aorty daného pacienta. K tomuto účelu byly využity morfologické obrazy s vysokým prostorovým rozlišením (viz výše). Aorta byla semi-manuálně segmentována pomocí softwaru 3D Slicer (7) a získaný povrch aorty byl reprezentován pomocí nestrukturované sítě. Tato síť byla následně promítnuta

Tab. 1. Seznam pacientů obsahující pro každého pacienta informaci o stentech a stenózách v bifurkaci aorty

Table 1. List of patients informing about the stent and stenoses positions in the aortic bifurcation

Vyšetření	Stenty	Stenózy	Komentář
pacient A	v obou aa. il. com.	žádné	ve stentech omezený signál; vpravo stenty typu Luminexx
pacient B	stenty v obou aa. il. com.	stenózy v obou aa. fem. interna a v pravé a. fem. externa	ve stentech omezený signál; stenty typu Epic Stent
pacient C	v obou aa. il. com.	v levé a. il. com. a v pravé a. il. externa	v levém stentu signál omezenější než v pravém
pacient D	stenty v pravé a. il. com. a v pravé a. il. externa	stenóza v levé a. il. externa	
pacient E	stenty v obou aa. il. externa	stenóza v pravé a. il. com.	nulový signál ve stentech; vlevo stent typu Luminexx
pacient F	žádné	stenózy v obou aa. il. int. a obou aa. fem. interna	
pacient G	žádné	stenóza v pravé a. il. interna	za stenózou omezený signál
pacient H1	žádné	žádné (v oblasti měření)	
pacient H2	žádné	žádné (v oblasti měření)	měření po 1 roce, bez významné stenózy



rozlišení mřížky pro numerické simulace tedy neodpovídá prostorovému rozlišení morfologických ani 4D Flow dat (prostorový krok numerické sítě je typicky výrazně menší).

Optimalizační úloha

Cílem optimalizační úlohy bylo získání rychlostního pole s vyšším poměrem signál/šum a jemnějším časovým a prostorovým rozlišením. Za tímto účelem je do LBM simulace přidáno silové pole působící v objemu s tekutinou. Silové pole je určeno optimalizační úlohou vždy v časovém intervalu ohraničeném dvěma po sobě následujícími náběry rychlostních polí je použito jako počáteční podmínka pro LBM simulaci. S druhým naměřeným rychlostním polem se porovnává rychlostní pole získané v koncovém čase simulace. Na základě tohoto rozdílu je provedena aktualizace silového pole. Tímto způsobem je iterativně snižován rozdíl mezi měřeními a simulací v koncovém čase (obr. 2).

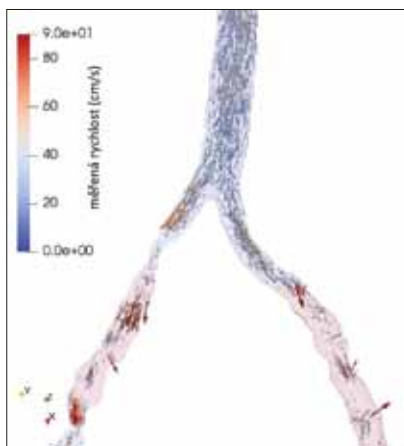
2 Schéma simulace. Naměřené rychlostní pole ve dvou po sobě jdoucích okamžicích slouží jako počáteční podmínka a jako „fitovaný“ žádaný stav, resp. simulované rychlostní pole se iterativně mění skrze virtuální silové působení.

Diagram of the simulation. Two measured velocity fields in two consecutive time frames serve as the initial condition and as the required state to be fitted, i.e. the simulated velocity field is iteratively updated under the influence of virtual forces.

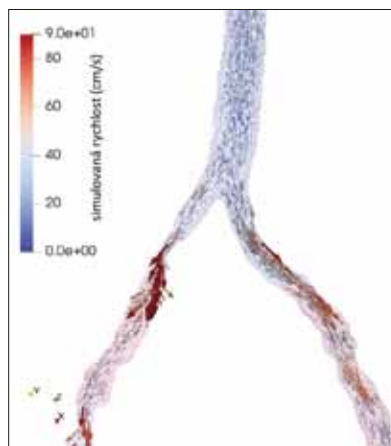
do pravidelné mřížky se zvoleným rozlišením. Do bodů odpovídajícím vnitřku aorty jsou následně interpolovány

naměřené složky rychlosti z 4D Flow dat a probíhá na nich řešení mřížkovou Boltzmannovou rovnicí. Prostorové

3a



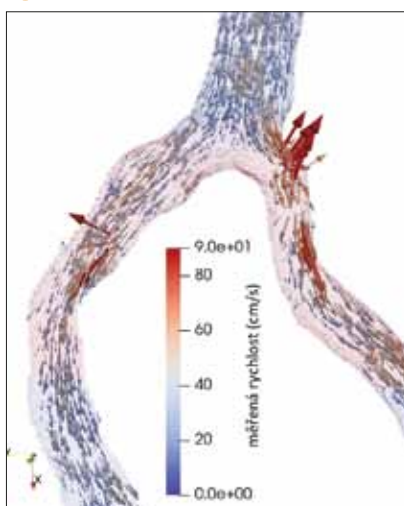
3b



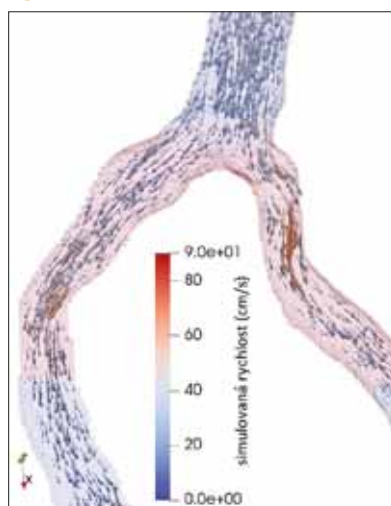
3 Naměřené (a) a simulované (b) rychlostní pole pacienta E, systola, frontální pohled. Je patrné nepřesné měření rychlosti za stenózou a v obou stentech. Rychlosti větší než 90 cm/s již nejsou od této rychlosti barevně odlišeny. Světle červená část anatomie označuje oblast, ve které nedocházelo k fitování simulovaného proudění naměřenými daty.

Measured (a) and simulated (b) velocity field of the patient patient E, systole, frontal view. Inaccurate velocity measurement within the stents and after the stenosis is present. Velocities larger than 90 cm/s are depicted in the same color shade. The light red part of the anatomy denotes the region in which no fitting of simulated data to measured data was performed.

4a

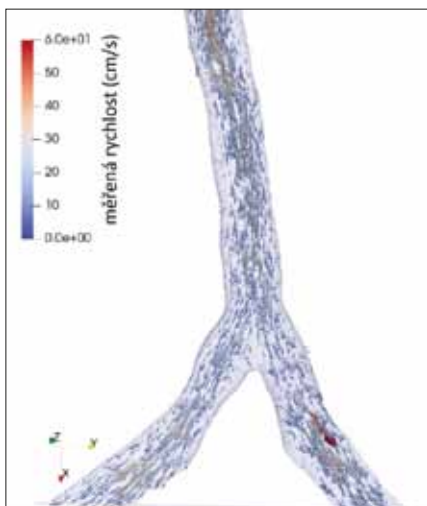


4b

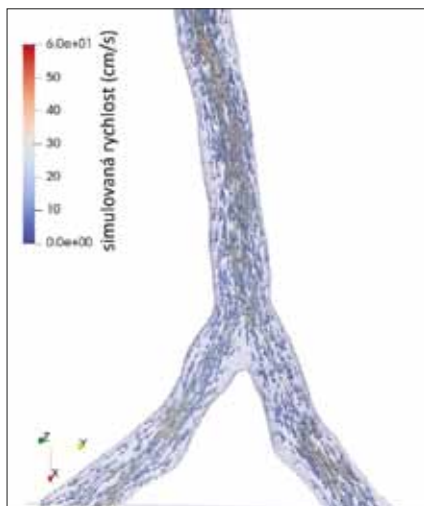


4 Naměřené (a) a simulované (b) rychlostní pole pacienta C, systola, frontální pohled
Measured (a) and simulated (b) velocity field of the patient C, systole, frontal view

5a

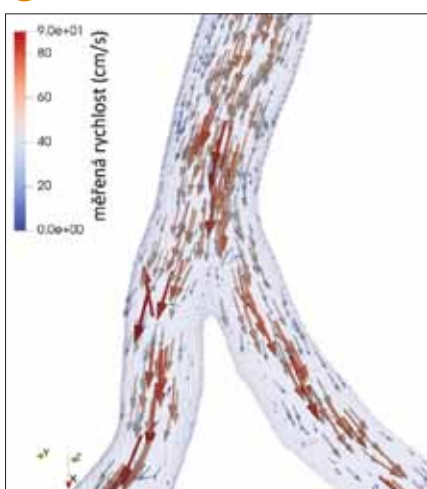


5b

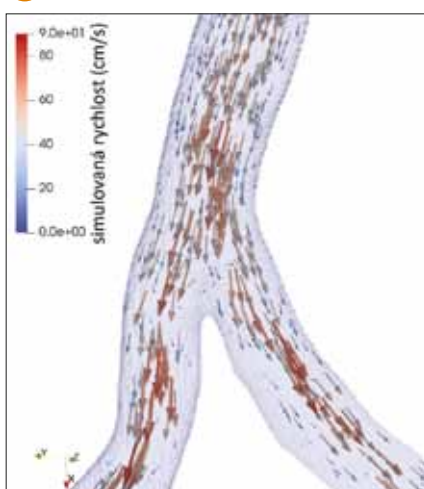


5 Naměřené (a) a simulované (b) rychlostní pole pacienta H, první měření, systola, frontální pohled
Measured (a) and simulated (b) velocity field of the patient H, first measurement, systole, frontal view

6a

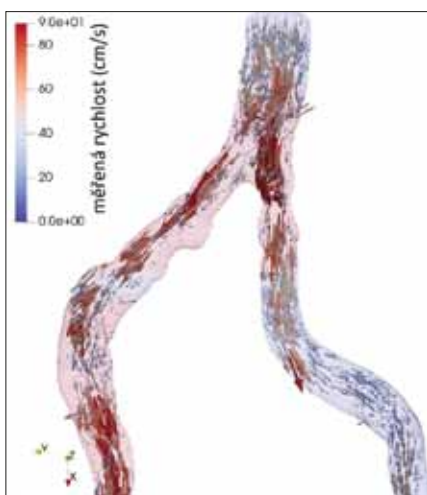


6b

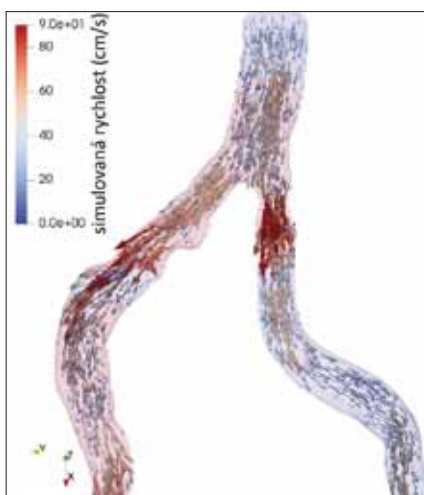


6 Naměřené (a) a simulované (b) rychlostní pole pacienta F, systola, frontální pohled
Measured (a) and simulated (b) velocity field of the patient F, systole, frontal view

7a



7b



7 Naměřené (a) a simulované (b) rychlostní pole pacienta B, systola, frontální pohled
Measured (a) and simulated (b) velocity field of the patient B, systole, frontal view

VÝSLEDKY

Na obrázku 3 je zobrazeno naměřené a simulované rychlostní pole pro pacienta E v okamžiku systoly. V naměřených datech MR lze pozorovat výpadek signálu v oblasti stentu v levé i pravé větvi a také v oblasti bezprostředně

za stenózou v pravé větvi, kde ještě ovšem stent není přítomen. To neodpovídá fyziologické situaci (není to fyzikálně možné). Oproti tomu v simulovaných datech je ihned za stenózou patrný nárůst rychlosti, což dává fyzikální smysl. Dále za stenózou lze potom pozorovat rozšíření cévy a s tím související pokles rychlosti.

Tok zpočátku není usměrněný, což odpovídá obecně známému výskytu turbulentního proudění za překážkou, a postupně se usměrňuje. Kvalitativně se tak simulovaný tok chová fyziologičtěji než naměřená data s nízkým poměrem signál/šum. V levé větvi lze také pozorovat, že simulovaný tok odpovídá předpokládané

realitě lépe než naměřená data; náhodně orientované vektory rychlosti v hypo-signální oblasti jsou v simulovaném poli nahrazeny usměrněným tokem.

Pacient C (obr. 4) měl omezený signál v pravém stentu a prakticky nulový signál v levém stentu. To se projevilo přítomností falešného retrográdního toku v levé pánevní tepně a mírnými nepřesnostmi v pravé. Simulace toto napravuje, ovšem nezachycuje významnou 80% restenózu v levém stentu, jak ji zmiňuje radiologický popis (na základě měření rychlosti toku sekvencí 2D Phase Contrast). To je patrně způsobeno tím, že byl v tomto místě poškozen signál i na anatomických obrazech, ze kterých vycházela segmentace, takže ta pak nemohla stenózu správně postihnout.

V případě pacienta F (obr. 5) nebyly v měřené oblasti přítomny žádné stenty ani stenózy. Měřená a simulovaná data se prakticky neliší. Výjimku tvoří jedna malá oblast v levé větvi, kde byl naměřen nepřiměřeně rychlý tok. Zjevně příčinou se jeví nízký poměr signál/šum v tomto místě. Simulace je řízena rovnicemi, které zajišťují zákon zachování toku. Z tohoto hlediska jsou simulovaná data konzistentnější.

Situace je podobná i u pacienta H1 (obr. 6). Ani zde nejsou přítomny stenty a simulovaný tok je konzistentnější z hlediska zákona zachování toku.

Pacient B (obr. 7) měl implantované stenty v obou větvích bifurkace aorty; v levé větvi jeden stent, v pravé větvi dva stenty za sebou s mírným odstupem. Ve všech třech stentech byl naměřen omezený signál. V měřených datech se to projevuje sice poměrně usměrněným tokem, ovšem velikost rychlosti je zjevně měřena chybně, neboť se skokově mění. Simulovaná data tento nedostatek nemají. Na základě segmentace jsou v simulovaných datech zřejmá dvě místa se zrychleným tokem ukazujícím

na potenciální stenózu. Radiologický popis konstatuje obtížné hodnocení průtoku stenty, a stenózy v nich proto nezmiňuje. Zde tedy simulovaný tok může pomoci s jinak nemožnou kvantifikací průtoku. Závisí ovšem i na kvalitě segmentace cévy.

U ostatních pacientů byly výsledky konzistentní s výše zmíněnými vybranými měřeními a simulacemi již zachycenými na obrázcích.

DISKUSE

Naše studie se zaměřila na využití matematického modelování průtoku krve v tepnách, zejména pak s cílem zpřesnit vizualizaci a kvantifikaci toku v případě implantace stentů, které zeslabí či dokonce zcela potlačí signál MR. Využili jsme metodu měření průtoku pomocí sekvence 4D Flow, která je sice časově velmi náročná, avšak poskytuje komplexní data z celého objemu zájmu, a při níž je také naměřen časový vývoj všech složek vektoru rychlosti proudění.

Vizuálním porovnáním výsledků přímého měření proudění pomocí MR a matematického modelu proudění v tepnách ukážeme dobrou shodu charakteru proudění v oblastech mimo stenty a kritické stenózy, avšak lepší výsledky dává matematický model v případě proudění uvnitř stentu nebo v oblastech těsně za stenózou, tedy tam, kde měření toku přímo z fázových obrazů MR selhává buď kvůli výraznému poklesu signálu uvnitř stentu (a tedy poklesu poměru signál/šum), nebo oblastech s vysokým podílem turbulencí toku. Matematický model může mít přínos i v oblastech mimo stenty, kde díky zákonu zachování toku odstraňuje menší nepřesnosti způsobené nízkým poměrem signál/šum.

Hodnocení závažnosti stenóz uvnitř stentů v případě výpadku signálu je

nemožné. Matematický model tuto kvantifikaci umožňuje, výsledky jsou ovšem závislé na kvalitě segmentace požadované anatomické struktury – tedy příslušné cévy – a jsou možné jen v případech, že jsou k segmentaci použita taková MR data, kde daný stent signál nezeslabuje. Nutná je také znalost proudění v okolí problematické oblasti. Limitací současné implementace metody je časová náročnost. Samotná LBM optimalizace trvá 2–3 hodiny. Segmentace a zpracování MR dat zabere za současných podmínek podobný čas.

Na definitivní statistické potvrzení přínosu uvedené metodiky je náš soubor pacientů zřejmě příliš malý, ale rozбором jednotlivých případů jsme byli schopni ukázat její přínos.

Cílem tohoto příspěvku je ukázat potenciál matematického modelování při klinickém zobrazení průtoku krve pomocí MR a hodnocení změn tohoto průtoku při aplikaci stentů. Je zřejmé, že využití tohoto potenciálu a zavedení metody do klinické praxe ještě bude nějakou dobu trvat (překážkou je i časová náročnost), ale tyto metody i spolu s využitím umělé inteligence se v poslední době překotně vyvíjejí.

ZÁVĚR

Matematické modelování průtoku krve v cévách může pozitivně přispět ke správnému zobrazení charakteru proudění, a to zejména v oblastech, kde chybí signál MR nebo je velmi nízký poměr signál/šum. To je například uvnitř stentů nebo také těsně za stenózami. Naše studie ukázala potenciál sepejetí neinvazivního měření průtoku pomocí MR sekvence 4D Flow a matematického modelu. Uplatnění této metodiky v klinické praxi a její možné rozšíření o algoritmy umělé inteligence bude ještě potřebovat nějaký čas. ●

LITERATURA

1. Lotz J, Meier C, Leppert A, Galanski M. Cardiovascular flow measurement with phase-contrast MR imaging: basic facts and implementation. *RadioGraphics* 2002; 22(3): 651–671.
2. Dwyerfeldt P, Bissell M, Barker AJ, et al. 4D flow cardiovascular magnetic resonance consensus statement. *J Cardiovasc Magn Reson Internet* 2015; 17(1). Available from: <http://dx.doi.org/10.1186/s12968-015-0174-5>
3. Bunck A, Jüttner A, Kröger J, Burg, et al. 4D phase contrast flow imaging for in-stent flow visualization and assessment of stent patency in peripheral vascular stents – A phantom study. *European Journal of Radiology* 2012; 81: e929–937.
4. Morris PD, Narracott A, von Tengg-Kobligh H, et al. Computational fluid dynamics modelling in cardiovascular medicine. *Heart* 2016; 102(1): 18–28. doi: 10.1136/heartjnl-2015-308044 [Epub 2015 Oct 28]. PMID: 26512019; PMCID: PMC4717410.
5. Nourgaliev RR, Dinh TN, Theofanous TG, Joseph D. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications. *Int J Multiph Flow Internet* 2003; 29(1): 117–169. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932202001088>
6. Galabov R, Škardová K, Chabiniok R, et al. Zkušenosti s použitím a zpracováním dat z měření průtoků magnetickou rezonancí sekvencí 4D Flow. *Ces Radiol* 2022; 76(4): 249–255.
7. Fedorov A, Beichel R, Kalpathy-Cramer J, et al. 3D Slicer as an Image Computing Platform for the Quantitative Imaging Network. *Magn Reson Imaging* 2012; 30(9): 1323–1341. PMID: 22770690. PMCID: PMC3466397.